ETSETB
Matemàtiques de la Telecomunicació

Transformada de Fourier

Notes de Classe
Exemples i Problemes

Anna Lladó
Departament de Matemàtica Aplicada IV

Març del 2012

Índex

Capítol 1

Transformada de Fourier

1.1 Introducció

En moltes aplicacions les funcions involucrades no són periòdiques, però presenten certs aspectes periòdics. Per exemple, el consum d'energia en un llarg període de temps disminueix els caps de setmana i també disminueix durant les nits. La transformada de Fourier serveix per analitzar aquesta informació en certa manera periòdica.

Introduim la transformada de Fourier com a límit d'una sèrie de Fourier en la que el seu període tendeix a infinit. Donem després la seva definició formal com una integral impròpia per funcions reals o complexes amb domini sobre tota la recta real. En aquest nou context, obtindrem la funció original com una funció inversa de la seva transformada.

L'utilització d'aquest recurs té avantatges en dos sentits importants, d'una banda es pot tractar amb un conjunt de funcions més ampli i d'altra, és més còmode manipular integrals que manipular sèries, en general.

1.2 De la sèrie a la transformada de Fourier

En el Capítol anterior hem vist que donada una funció $x \in L^2(-L, L)$, podem definir la sèrie de Fourier de la seva extensió $2L$–periòdica, $\widetilde{x}$, com

$$SCF(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{j \frac{\pi}{L} nt},$$

amb

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} x(t)e^{-j\frac{\pi}{L}nt}dt.$$

Volem trobar una representació similar de x si $L \to \infty$. Per això cal mesurar els coeficients de Fourier per funcions amb períodes tendint a infinit.

Si denotem per $f_n = n/2L$ i $\triangle f = f_{n+1} - f_n = \frac{1}{T}$, aleshores podem escriure,

$$c_n = \triangle f \int_{-L}^{L} x(t)e^{-j2\pi f_n t}dt = \triangle f X_L(f_n),$$

$$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \triangle f X_L(f_n)e^{j2\pi f_n t}.$$

Si fem tendir $L \to \infty$, tenim,

$$X_L(f_n) \to X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt,$$

i com que $\triangle f \to 0$, podem escriure,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df.$$

Aquesta situació, és a dir, les funcions no periòdiques seran les que ocuparan ara la nostra atenció.

1.3 Transformada de Fourier a $L(\mathbb{R})$

La transformada de Fourier es defineix per funcions reals o complexes que tenen per domini tota la recta real. No tota funció amb domini sobre tota la recta real admet transformada de Fourier. Existeix una condició suficient molt simple que permet garantir l'existència de transformada. Cal que la funció original sigui absolutament integrable. El conjunt d'aquestes funcions habitualment es denota i defineix de la forma següent.

$$L(\mathbb{R}) = \{x : \mathbb{R} \to \mathbb{C};\ \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt < \infty\}.$$

Definició 1.1 *Donada una funció $x \in L(\mathbb{R})$ es defineix la* **transformada de Fourier** *d'aquesta funció com l'aplicació $X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, que assigna a cada nombre real f el valor de la següent integral impròpia.*

$$X(f) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt. \tag{1.1}$$

□

De vegades farem servir la notació $\mathcal{F}(x)$ per representar l'aplicació que assigna a cada funció $x \in L(\mathbb{R})$ la seva transformada.

Tal com hem mencionat, les transformades de Fourier juguen un paper similar al dels coeficients de Fourier però en en aquest cas l'integral que fem servir no té un domini acotat i per tant és impròpia. La convergència d'aquestes integrals es pot garantir per funcions absolutament integrables, és a dir, $x \in L(\mathbb{R})$.

Exemple 1.2 *Per qualsevol nombre $a \in \mathbb{R}^+$ considerem la funció*

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Comprovem que és absolutament integrable a $\mathbb{R}$,

$$\int_0^{\infty} e^{-at} dt = \frac{1}{a} < \infty$$

Calculem la seva transformada,

$$\begin{aligned} X(f) \quad &= \quad \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^{\infty} e^{-t(a+j2\pi f)} dt \\ &= \quad \frac{1}{a + j2\pi f} = \frac{a - j2\pi f}{a^2 + (2\pi f)^2}. \end{aligned}$$

Observem que X és una funció complexa. □

Observació 1.3 *En particular, si $x \in L(\mathbb{R})$ aleshores $X(f)$ és una funció acotada.*

$$|X(f)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty.$$

□

1.3.1 Transformades de funcions reals de $L(\mathbb{R})$

En el cas particular de les **funcions reals** absolutament integrables sobre tota la recta real, fent servir la Formula d'Euler obtenim la següent expressió per la transformada.

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(2\pi ft)dt - j\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin(2\pi ft)dt \\ &= \mathcal{R}(X) - j\mathcal{I}m(X). \end{aligned}$$

Aquesta expressió dona sentit a les anomenades Transformades sinus i cosinus de Fourier definides de la manera següent.

Definició 1.4 *Donada una funció real $x \in L(0,\infty)$ es defineix la*

1. **Transformada sinus de Fourier** *com*
$$\mathcal{F}_s(x) = \int_0^{\infty} x(t)\sin(2\pi ft)dt.$$
2. **Transformada cosinus de Fourier** *com*
$$\mathcal{F}_c(x) = \int_0^{\infty} x(t)\cos(2\pi ft)dt.$$

□

Observació 1.5 *Qualsevol funció real $x \in L(\mathbb{R})$ es pot expressar com a suma de la seva part parell x_p i la seva part senar x_s,*

$$x(t) = \frac{x(t)+x(-t)}{2} + \frac{x(t)-x(-t)}{2} = x_p(t) + x_s(t).$$

□

Fent servir l'observació anterior obtenim,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x_p(t)+x_s(t))e^{-j2\pi f}dt && (1.2) \\ &= 2\int_0^{\infty} x_p(t)\cos(2\pi ft)dt - j2\int_0^{\infty} x_s(t)\sin(2\pi ft)dt && (1.3) \\ &= 2(\mathcal{F}_c(x) - j\mathcal{F}_s(x)). && (1.4) \end{aligned}$$

Com a conseqüència directa de l'expressió (1.4) de la transformada obtenim les següents propietats. En particular, les transformades conserven les simetries de les funcions originals.

Proposició 1.6 *Donada una funció real $x \in L(\mathbb{R})$, es compleix que*

1. *si $x(t)$ és parell $\Rightarrow$ $X(f)$ és real i parell.*
2. *si $x(t)$ és senar $\Rightarrow$ $X(f)$ és imaginari pur i senar.*
3. $X(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j2\pi ft}dt = \overline{X(f)}$. $\square$

Uns exemples bàsics i senzills són els següents.

Exemple 1.7 *Considerem la funció real, contínua i parell*

$$x(t) = e^{-|t|}.$$

Comprovem que és absolutament integrable a $\mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}dt = 2\int_{0}^{\infty} e^{-t}dt = 2.$$

Calculem la seva transformada,

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{t(1-j2\pi f)}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t(1+j2\pi f)}dt \\ &= \frac{1}{1-2\pi jf} + \frac{1}{1+2\pi jf} = \frac{2}{1+(2\pi f)^2}. \end{aligned}$$

Observem que X és una funció real i parell i també és absolutament integrable ja que és continua i acotada per 2. $\square$

Exemple 1.8 *Considerem la funció continua a trossos, real i senar,*

$$x(t) = \begin{cases} e^{-t} & t \geq 0 \\ -e^{t} & t < 0 \end{cases}$$

Comprovem que és absolutament integrable a $\mathbb{R}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt = 2\int_{0}^{\infty} e^{-t}dt = 2$$

Calculem la seva transformada.

$$\begin{aligned} X(f) &= -\int_{-\infty}^{0} e^{t(1-j2\pi f)}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t(1+j2\pi f)}dt \\ &= \frac{1}{1-j2\pi f} - \frac{1}{1+j2\pi f} = \frac{4\pi f j}{1+(2\pi f)^2}. \end{aligned}$$

Observem que X és una funció imaginària pura i senar. □

1.3.2 Transformada inversa de Fourier

Hi ha una aplicació que en la majoria de casos permet recuperar la funció original a partir de la seva transformada.

Definició 1.9 *Es defineix la* **transformada inversa de Fourier** *d'una funció $x \in L(\mathbb{R})$ com l'aplicació $X^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, que assigna a cada nombre real t el valor de la següent integral impròpia.*

$$X^{-1}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi f t}df. \tag{1.5}$$

Per representar l'aplicació que assigna a cada transformada $X \in L(\mathbb{R})$ la funció original x es fa servir la notació $\mathcal{F}^{-1}(X)$. □

El següent resultat recull el bon comportament analític de la transformada inversa, sempre que la funció transformada sigui absolutament integrable, fet que és necessari per que l'integral impròpia (1.5), que defineix la transformada inversa, sigui convergent.

Teorema 1.10 *: Si $x, X \in L(\mathbb{R})$ aleshores, l'integral impròpia (1.5) és convergent.* □

És clar que amb la transformada inversa de la transformada d'una funció volem recuperar la funció original, però això només es pot afirmar quan la funció original és continua. El següent teorema recull el comportament d'aquestes aplicacions en un sentit més ampli.

Teorema 1.11 *: Si $x, X \in L(\mathbb{R})$ aleshores,*

1. *$x(t) = X^{-1}(X(f))(t)$, quasi per tot $t \in \mathbb{R}$.*
2. *$x(t) = X^{-1}(X(f))(t)$, per tot $t \in \mathbb{R}$ si $x(t)$ és contínua.*

$\square$

En qualsevol cas podem escriure,

$$x = \mathcal{F}^{-1}(X).$$

1.3.3 Valor Principal de Cauchy

Per calcular integrals impròpies de vegades és útil fer servir el que s'anomena valor principal de Cauchy que definim a continuació.

Definició 1.12 *El* **valor principal de Cauchy** *d'una integral impròpia $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt$ és el límit,*

$$\lim_{h\to\infty} \int_{-h}^{h} g(t)dt.$$

$\square$

Si una integral impròpia és convergent, aleshores existeix el seu valor principal de Cauchy i coincideix amb el valor de l'integral,

$$\lim_{h\to\infty} \int_{-h}^{h} g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt.$$

Però en sentit contrari no sempre és cert.

Observació 1.13 *En particular, si $x, X \in L(\mathbb{R})$, gràcies a la convergència de les integrals (1.1) i (1.5), existeix el seu valor principal de Cauchy i coincideix amb el valor d'aquestes integrals.* $\square$

El següent resultat generalitza el Teorema 1.11 i dona un resultat similar al que tenim per la convergència puntual en sèries de Fourier.

Teorema 1.14 *: Si $x(t)$ és una funció contínua a trossos i la seva derivada també, aleshores*

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{i2\pi ft}df = \lim_{h\to\infty}\int_{-h}^{h} X(f)e^{i2\pi ft}df = \frac{x(t^+)+x(t^-)}{2}.$$

$\square$

Exemple 1.15 *Considerem la funció pols rectangular per un $a \in \mathbb{R}^+$,*

$$p_a(t) = \begin{cases} 1 & |t| \le a \\ 0 & |t| > a \end{cases}$$

Com que p_a és contínua a trossos i està acotada per 1, és de $L(\mathbb{R})$. Calculem la seva transformada.

$$\mathcal{F}(p_a) = \int_{-\infty}^{\infty} p_a(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-a}^{a} e^{-j2\pi ft}dt = \frac{\sin(2\pi fa)}{\pi f}.$$

$\mathcal{F}(p_a)$ és una funció real i parell amb una discontinuïtat evitable en $f = 0$ i com que està acotada per 1 és de $L(\mathbb{R})$. Podem calcular per tant la seva transformada inversa,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi fa)}{\pi f} e^{j2\pi ft}df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi fa)}{\pi f}(\cos(2\pi ft) + j\sin(2\pi ft))df \\ &= 2\int_{0}^{\infty} \frac{\sin(2\pi fa)}{\pi f}\cos(2\pi ft)df. \end{aligned}$$

Gràcies el Teorema 1.14 aquesta integral val,

$$\mathcal{F}^{-1}(t) = \begin{cases} 1 & |t| < a \\ 1/2 & |t| = a \\ 0 & |t| > a \end{cases}$$

En particular, per $t = 0$, deduïm que per qualsevol $a \in \mathbb{R}^+$,

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin(2\pi fa)}{\pi f} = 1/2.$$

$\square$

1.4 Propietats

Tal com hem comentat, les transformades i les transformades inverses de Fourier tenen propietats que les fan interessants des de un punt de vista operacional. Les demostracions d'aquestes propietats, en general, són immediates.

1.4.1 Linealitat

Una propietat molt important que compleixen les transdormades de Fourier és el fet que poguem calcular la transformada de Fourier d'una combinació lineal de funcions com la combinació lineal de les seves transformades. Aquesta propietat és conseqüència directa de la definició com a integral (1.1).

$$\left.\begin{array}{c} x, y \in L(\mathbb{R}) \\ \alpha, \beta \in \mathbb{C} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{F}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{F}(x) + \beta \mathcal{F}(y). \tag{1.6}$$

□

1.4.2 Canvis de variable lineals

Gràcies a les propietats de les integrals, si coneixem la transformada de Fourier d'una funció $x(t) \in L(\mathbb{R})$, podem obtenir de forma directa la transformada de Fourier per qualsevol canvi de variable lineal, $\tau(t) = at + b$, en la funció original $x(t)$.

1. **Translació en el temps**

   Si el canvi de variable és una translació aleshores, fent servir les propietats de l'exponencial obtenim,

$$\left.\begin{array}{c} x \in L(\mathbb{R}) \\ t_0 \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{F}(x(t - t_0)) = e^{-j2\pi f t_0} \mathcal{F}(x). \tag{1.7}$$

□

Amb el canvi, $u = t - t_0$ tenim,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(x(t-t_0)) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-j2\pi f(u+t_0)}du \\ &= e^{-j2\pi ft_0}\int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-j2\pi fu}du\end{aligned}$$

Exemple 1.16 *Fent servir la propietat anterior podem obtenir de forma inmediata la transformada de qualsevol translació del pols rectangular $p_a(t)$. És a dir, per qualsevol $t_0 \in \mathbb{R}$,*

$$\mathcal{F}(p_a(t-t_0)) = e^{-j2\pi ft_0}\mathcal{F}(p_a(t)) = e^{-j2\pi ft_0}\frac{\sin(2\pi fa)}{\pi f}.$$

□

2. **Canvi d'escala**

$$\left.\begin{array}{c} x \in L(\mathbb{R}) \\ a \in \mathbb{R}^* \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{F}(x(at)) = \frac{1}{|a|}X(f/a). \tag{1.8}$$

□

Per comprovar aquest resultat fem servir el canvi $at = u$ i diferenciem dos casos.

(a) Si $a > 0$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(x(at)) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-j2\pi ft}dt \\ &= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-j2\pi\frac{f}{a}u}du\end{aligned}$$

(b) Si $a < 0$,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(x(at)) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-j2\pi ft}dt \\ &= \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-j2\pi\frac{f}{a}u}du\end{aligned}$$

1.4.3 Derivació en el temps

Podem obtenir la transformada de Fourier de la derivada d'una funció $x(t) \in L(\mathbb{R})$, a partir de la seva transformada, sempre que $x(t)$ sigui contínua i la seva derivada també. En general es compleix,

$$x, x', x'', \cdots, x^{(n)} \in L(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \mathcal{F}(x^{(n)}) = (2\pi j f)^n \mathcal{F}(x). \qquad (1.9)$$

$\square$

Per provar aquest resultat fem servir inducció sobre n.

Com que $x \in L(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$, la seva transformada inversa concideix amb x,

$$x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{j2\pi f t} df.$$

Com que $x' \in L(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$, derivant respecte t els dos termes de l'igualtat anterior obtenim,

$$x'(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f)(j2\pi f) e^{j2\pi f t} df.$$

Així, fent servir la definició de transformada inversa veiem que el resultat és cert per $n = 1$,

$$\mathcal{F}(x') = (2\pi j f)\mathcal{F}(x).$$

Com hipòtesi d'inducció suposem que

$$x^{(n-1)}(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f)(j2\pi f)^{n-1} e^{j2\pi f t} df.$$

Derivant respecte a t les dues parts de l'igualtat anterior obtenim,

$$x^n(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f)(j2\pi f)^n e^{j2\pi f t} df.$$

D'on, per definició de transformada inversa tenim,

$$\mathcal{F}(x^{(n)}) = (2\pi j f)^n \mathcal{F}(x).$$

1.4.4 Derivació en la freqüència

Podem obtenir la derivada n-esíma de la transformada de Fourier de forma simple, sempre que existeixin les transformades de Fourier de les funcions $t^k x(t)$, per tot $0 \leq k \leq n$. És a dir, si denotem $X(f) = \mathcal{F}(x)$, aleshores

$$x, tx, t^2x, \cdots, t^n x \in L(\mathbb{R}) \;\Rightarrow\; X^{(n)} = (-2\pi j)^n \mathcal{F}(t^n x). \tag{1.10}$$

□

Aquí també fem servir inducció sobre n.

Si $X(f)$ és la transformada de Fourier d'una funció $x \in L(\mathbb{R})$,

$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-j2\pi f t} dt,$$

derivant respecte f els dos termes de l'igualtat anterior tenim,

$$X'(f) = -2\pi j \int_{\mathbb{R}} t x(t) e^{-j2\pi f t} dt.$$

Així, fent servir la definició de transformada veiem que el resultat és cert per $n = 1$.

Com que $t^{n-1}x \in L(\mathbb{R})$, podem suposar com hipòtesi d'inducció que

$$X^{(n-1)}(f) = (-2\pi j)^{n-1} \int_{\mathbb{R}} t^{n-1} x(t) e^{-j2\pi f t} dt.$$

Derivant respecte a f les dues parts de l'igualtat anterior obtenim el resultat,

$$X^n(f) = (-2\pi j)^n \int_{\mathbb{R}} t^n x(t) e^{-j2\pi f t} dt.$$

Exemple 1.17 *Per qualsevol nombre $a \in \mathbb{R}^+$ calculem la transformada de Fourier de la funció*

$$x(t) = e^{-at^2}.$$

Segons la propietat de derivació respecte el temps tenim,

$$\mathcal{F}(x') = 2\pi f j \mathcal{F}(x).$$

D'altra banda, com que $x'(t) = -2atx(t)$, segons la propietat de derivació respecte la freqüència, si denotem $X(f) = \mathcal{F}(x)$, tenim,

$$\mathcal{F}(-2atx(t)) = -2a\mathcal{F}(tx(t)) = -2aX'(f).$$

Per tant,

$$X'(f) = -\frac{\pi f j}{a} X(f).$$

Aquesta eqüació diferencial relaciona la derivada de la transformada de x amb la transformada de la seva funció derivada. □

1.4.5 Dualitat

La transformada de Fourier d'una transformada de Fourier no coincideix amb la funció original, però si coincideix amb el corresponent valor simètric en la funció d'origen.

Per provar això només cal fer servir les definicions de transformada i transformada inversa.

$$x, X \in L(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \mathcal{F}(X(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{-j2\pi ft}dt = x(-f). \qquad (1.11)$$

□

Exemple 1.18 *Comprovem que per tot $a \in \mathbb{R}^+$ la funció $x(t) = e^{-a|t|}$ és absolutament integrable a $\mathbb{R}$,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}dt = 2\int_{0}^{\infty} e^{-at}dt = \frac{2}{a}.$$

Calculem la seva transformada de Fourier,

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{t(a-j2\pi f)}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t(a+j2\pi f)}dt \\ &= \frac{1}{a-2\pi fj} + \frac{1}{a+2\pi fj} = \frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}. \end{aligned}$$

La funció X és real i és absolutament integrable, ja que és continua i acotada per $2/a$. Per tant, fent servir la propietat anterior, obtenim per tot $a \in \mathbb{R}^+$, la transformada de Fourier,

$$\mathcal{F}\left(\frac{2a}{a^2+(2\pi t)^2}\right) = e^{-a|f|}.$$

Observem que el fet que tant $x(t)$ com $X(f)$ siguin reals i parells fa que la transformada de la transformada de Fourier, en aquest cas sigui la funció original. □

Exemple 1.19 *En el Exemple (1.2) hem calculat la transformada de Fourier per qualsevol nombre $a \in \mathbb{R}^+$ de*

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases},$$

$$X(f) = \frac{a - j2\pi f}{a^2 + (2\pi f)^2}.$$

Aleshores,

$$\mathcal{F}\left(\frac{a - j2\pi t}{a^2 + (2\pi t)^2}\right) = x(-f) = \begin{cases} e^{af}, & f \leq 0 \\ 0, & f > 0 \end{cases},$$

□

1.4.6 Translació en freqüència

Com aplicació directa de la definició de transformada de Fourier obtenim la següent propietat.

$$\left.\begin{array}{c} x \in L(\mathbb{R}) \\ f_0 \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow X(f - f_0) = \mathcal{F}(e^{j2\pi f_0 t} x(t)). \tag{1.12}$$

□

Per definició de Transformada de Fourier tenim,

$$X(f - f_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(f - f_0)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f_0 t} x(t) e^{-j2\pi f t} dt.$$

Modulació

Una conseqüència important d'aquesta propietat, és la que ens permet obtenir la transformada d'un senyal modulat $x(t)\cos(2\pi f_0 t)$ a partir de la transformada del senyal sense modular $x(t)$.

$$\left.\begin{array}{c} x \in L(\mathbb{R}) \\ f_0 \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{F}(x(t)\cos(2\pi f_0 t)) = \frac{X(f - f_0) + X(f + f_0)}{2}. \tag{1.13}$$

□

Fent servir les propietatats de linealitat i desplaçament en freqüència,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x(t)\cos(2\pi f_0 t)) &= \mathcal{F}(x(t)\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}) \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{F}(e^{j2\pi f_0 t} x(t) + e^{-j2\pi f_0 t} x(t)) \\ &= \frac{X(f - f_0) + X(f + f_0)}{2}. \end{aligned}$$

De forma similar,

$$\mathcal{F}(x(t)\sin(2\pi f_0 t)) = \frac{X(f-f_0) - X(f+f_0)}{2j}.$$

□

1.5 Teorema de Convolució

El resultat més popular dins l'ambit de les transformades de Fourier, és el que fa referència a un producte especial de funcions, el producte de convolució, definit a través de la següent integral impròpia.

Definició 1.20 *Donades dues funcions $x, y \in L(\mathbb{R})$ es defineix el seu* **producte de convolució** *com la aplicació $x * y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, que assigna a cada nombre real t el valor de la següent integral,*

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau. \tag{1.14}$$

□

Aquest producte té un bon comportament algèbric, és a dir, compleix gairebé les propietats d'un producte estàndard: interna, commutativa, associativa i distributiva respecte la suma de funcions.

Propietats: Si $x, y, z \in L(\mathbb{R})$ aleshores es compleix,

1. $x * y \in L(\mathbb{R})$.
2. $x * y = y * x$.

   Fent el canvi $u = t - \tau$ obtenim,

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-u) y(u) du = (y * x)(t).$$

3. $x * (y * z) = (x * y) * z$.

4. $x * (y+z) = (x*y) + (x*z)$.

   Fent servir les propietats de l'integral tenim,

$$\begin{aligned} x*(y+z) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)(y+z)(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x(\tau)y(t-\tau) + x(\tau)z(t-\tau))d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)z(t-\tau)d\tau. \end{aligned}$$

□

Exemple 1.21 *Donats dos nombres $a, b \in \mathbb{R}^+$ considerem les funcions*

$$x(t) = e^{-at}u(t), \qquad y(t) = e^{-bt}u(t),$$

on

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Calculem,

$$(x*y)(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-a\tau}u(\tau)e^{-b(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau.$$

Com que

$$u(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \geq 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases},$$

$$u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & t \geq \tau \\ 0, & t < \tau. \end{cases}$$

Per $t \geq 0$ tenim,

$$x(\tau) = u(\tau)u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & 0 < \tau < t \\ 0, & \tau > t. \end{cases}$$

Observem que per $t < 0$, $x(\tau) = 0$.

Així,

$$\begin{aligned}
(x*y)(t) &= \int_{\mathbb{R}} x(\tau)e^{-a\tau}e^{-b(t-\tau)}d\tau \\
&= \int_0^t e^{-bt}e^{(b-a)\tau}d\tau = e^{-bt}\frac{e^{(b-a)t}-1}{b-a} \\
&= \begin{cases} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{b-a}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

□

El teorema següent, anomenat Teorema de Convolució, permet calcular la transformada d'aquest producte com un producte estàndard de funcions transformades i la seva demostració és molt sensilla, tal com veureu a continuació.

Teorema 1.22 (Teorema de convolució) *Si* $x, y \in L(\mathbb{R})$ *aleshores,*

$$\mathcal{F}(x*y) = X \cdot Y.$$

Demostració.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(x*y) &= \int_{-\infty}^{\infty}(x*y)(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)y(t-\tau)d\tau\right)e^{-j2\pi ft}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\left(\int_{-\infty}^{\infty}y(u)e^{-j2\pi f(u+\tau)}du\right)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\left(e^{-j2\pi f\tau}Y(f)\right)d\tau \\
&= Y(f)\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau = X(f)\cdot Y(f).
\end{aligned}$$

□

Exemple 1.23 *Calculem*

$$\mathcal{F}(p_a * p_a) = \mathcal{F}(p_a)\cdot\mathcal{F}(p_a) = \left(\frac{\sin(2\pi fa)}{\pi f}\right)^2.$$

El següent resultat és una especie de dual del teorema anterior. Ens diu que podem calcular la transformada d'un producte estàndard de funcions, com el producte de convolució de les seves transformades, sempre que aquestes siguin absolutament integrables. Però en aquest cas l'igualtat només val quasi per tot $f \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.24 *Si* $x, y, X, Y \in L(\mathbb{R})$, *aleshores quasi per tot* $f \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(x \cdot y) = X * Y.$$

□

1.6 Transformada de Fourier a $L^2(\mathbb{R})$

Si $x(t)$ és una funció de $L^2(\mathbb{R})$, pot ser que $x(t)$ no sigui de $L(\mathbb{R})$.

Exemple 1.25 *La funció* $x(t) = 1/(1+|t|)$ *és de* $L^2(\mathbb{R})$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+|t|)^2} = 2\int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t)^2} = -\frac{2}{1+t}\Bigg]_0^{\infty} = 2.$$

Però no és de $L(\mathbb{R})$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+|t|} = 2\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t} = 2\log(1+t)]_0^{\infty} = \infty.$$

□

Per tant, no es pot definir la transformada de Fourier de $x(t)$ com a (1.1).

Definició 1.26 *La* **transformada de Fourier d'una funció** $x \in L^2(\mathbb{R})$ *es defineix com*

$$\mathcal{F}(x) = X(f) \overset{\|\cdot\|_2}{=} \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} x(t) e^{-j2\pi f t} dt. \tag{1.15}$$

□

Segons la definició anterior, l'existència de la transformada de Fourier per una funció $x \in L^2(\mathbb{R})$ depèn de l'existència del valor principal de Cauchy de l'integral (1.1).

Teorema 1.27 *Si una funció és de* $L^2(\mathbb{R}) \cap L(\mathbb{R})$ *aleshores les definicions (1.26) i (1.1) coincideixen,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \overset{\|\cdot\|_2}{=} \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} x(t) e^{-j2\pi f t} dt.$$

□

Per interpretar el teorema anterior considerem la restricció de una funció $x \in L^2(\mathbb{R})$ en un interval finit $[-a, a]$,

$$x_a(t) = \begin{cases} x(t), & |t| \leq a \\ 0, & |t| > a \end{cases}$$

Si fem tendir $a \to \infty$ la funció x_a tendeix a la funció original x en mitjana quadràtica,

$$x(t) \overset{\|\cdot\|_2}{=} \lim_{a\to\infty} x_a(t).$$

Això és,

$$\|x - x_a\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - x_a(t)|^2 dt,$$

és a dir, quan a tendeix a infinit, la diferència entre x i x_a tendeix a zero.

És clar que la funció x_a és també de $L(\mathbb{R})$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt = \int_{-a}^{a} |x(t)|dt \leq \int_{-a}^{a} (1 + |x(t)|^2)dt.$$

i per tant tenim,

$$X(f) \overset{\|\cdot\|_2}{=} \lim_{a\to\infty} X_a(f) \overset{\|\cdot\|_2}{=} \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} x(t)e^{-j2\pi ft}dt.$$

Observem que aquest límit és també en mitjana quadràtica, és a dir,

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} |X(f) - X_a(f)|^2 dt = 0.$$

Exemple 1.28 *La funció $x(t) = e^{-|t|}$ és de $L^2(\mathbb{R}) \cap L(\mathbb{R})$ i per tant la seva transformada a $L^2(\mathbb{R})$ coincideix amb la de $L(\mathbb{R})$.*

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}e^{-j2\pi ft}dt = \frac{2}{1 + (2\pi f)^2} \\ &= \overset{\|\cdot\|_2}{\lim}_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} e^{-|t|}e^{-j2\pi ft}dt \\ &= \overset{\|\cdot\|_2}{\lim}_{a\to\infty} \frac{2 - e^{-a}(2\cos(2\pi f) + \pi f \sin(2\pi f)))}{1 + (2\pi f)^2}. \end{aligned}$$

□

La transformada inversa d'una funció $X \in L^2(\mathbb{R})$ és defineix de forma similar a com s'ha definit la transformada X per funcions d'aquest espai, és a dir, amb el valor principal de Cauchy.

Definició 1.29 *La* **transformada inversa de Fourier en** $L^2(\mathbb{R})$ *es defineix com*

$$\mathcal{F}^{-1}(X) \overset{\|.\|_2}{=} \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} X(f)e^{j2\pi ft}df. \tag{1.16}$$

□

En $L^2(\mathbb{R})$, la transformada inversa també compleix la **fórmula d'inversió**.

Teorema 1.30 *Si* $x, X \in L^2(\mathbb{R})$ *aleshores, es compleix*

$$x(t) \overset{\|.\|_2}{=} \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} X(f)e^{j2\pi ft}df.$$

□

Un fet destacable en $L^2(\mathbb{R})$, és que tan les transformades com les transformades inverses conserven el producte escalar.

Teorema 1.31 *Si* $x, y, X, Y \in L^2(\mathbb{R})$ *aleshores, es compleix*

1. $\langle x, y\rangle = \langle \mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y)\rangle$.
2. $\langle X, Y\rangle = \langle \mathcal{F}^{-1}(X), \mathcal{F}^{-1}(Y)\rangle$.

□

La conservació del producte escalar per les transformades de Fourier en funcions de $L^2(\mathbb{R})$ condueix de manera natural de la coneguda Fórmula de Parseval en espais $L^2(a, b)$ a la fórmula corresponent en aquest context de $L^2(\mathbb{R})$. Això és, la norma al quadrat d'una funció de $L^2(\mathbb{R})$ és igual a la norma al quadrat de la seva transformada de Fourier.

Teorema 1.32 (Fórmula de Parseval) *Si* $x \in L^2(\mathbb{R})$ *aleshores,*

$$\|x\|^2 = \|\mathcal{F}(x)\|^2.$$

□

1.7 TF de funcions generalitzades

Hi han funcions que no són de $L(\mathbb{R})$ ni de $L^2(\mathbb{R})$, com per exemple, les funcions constants o les funcions periòdiques. Per poder definir la transformada d'aquests tipus de funcions es fa servir l'anomenada Delta de Dirac, que va aparèixer com a eina útil per tractar amb derivades de funcions amb discontinuïtats de salt. Dins el context de les telecomunicacions representa un impuls d'amplitud infinita.

La Delta de Dirac no és una funció en el sentit estàndar, és el que s'anomena una **funció generalitzada**. Això és, una aplicació ϕ que assigna a cada funció $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ el nombre corresponent al següent producte escalar

$$\langle \phi, x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)x(t)dt.$$

En particular la **Delta de Dirac**, que es denota per δ, assigna a cada funció x el nombre

$$\langle \delta, x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)x(t)dt = x(0).$$

En general, tenim el següent resultat que equival a una definició per la Delta de Dirac.

Teorema 1.33 *Per tota funció x contínua en un entorn d'un punt t_0, $\varepsilon(t_0)$, es compleix*

$$\int_{\varepsilon(t_0)} \delta(t-t_0)x(t)dt = \begin{cases} x(t_0), & t \in \varepsilon(t_0) \\ 0, & t \notin \varepsilon(t_0) \end{cases} \tag{1.17}$$

□

1.7.1 TF de la Delta de Dirac

Si en el Teorema en (1.33) prenem $x(t) = e^{-j2\pi ft}$ com a funció contínua a $\mathbb{R}$ obtenim formalment la transformada de Fourier de $\delta(t-t_0)$.

$$\mathcal{F}(\delta(t-t_0)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)e^{-j2\pi ft}dt = e^{-j2\pi ft_0}. \tag{1.18}$$

□

En particular, per $t_0 = 0$ l'expressió (1.18) ens diu que

$$\mathcal{F}(\delta(t)) = 1.$$

□

Aplicant la dualitat en (1.18) obtenim,

$$\mathcal{F}(e^{j2\pi f_0 t}) = \delta(f - f_0). \tag{1.19}$$

□

En particular, per $f_0 = 0$, l'expressió (1.19) ens diu que

$$\mathcal{F}(1) = \delta(f).$$

□

TF d'una funció constant

Com a conseqüència de (1.19) deduïm que si $x(t) = c$, aleshores

$$\mathcal{F}(c) = c\delta(f).$$

□

1.7.2 TF de les funcions sinus i cosinus

L'expressió (1.19) també ens permet deduir de forma immediata les següents transformades.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\cos(2\pi f_0 t)) &= \frac{1}{2}\mathcal{F}(e^{2\pi j f_0 t} + e^{-2\pi j f_0 t}) \\ &= \frac{1}{2}(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\sin(2\pi f_0 t)) &= \frac{1}{2j}\mathcal{F}(e^{2\pi j f_0 t} - e^{-2\pi j f_0 t}) \\ &= \frac{1}{2j}(\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)).\end{aligned}$$

□

1.7.3 TF de les funcions periòdiques

Fent servir de nou (1.19) podem expressar la transformada de Fourier de qualsevol funció T–periòdica. Per això considerem la seva sèrie de Fourier,

$$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt}.$$

Aleshores, anomenant $f_0 = \frac{1}{T}$ i fent servir la linealitat de les transformades, a partir de (1.19) obtenim la transformada de Fourier de la funció $x(t)$.

$$\mathcal{F}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \mathcal{F}(e^{j\frac{2\pi}{T}nt}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta(f - nf_0).$$

□

1.7.4 TF de la funció signe

Hi han funcions simples però importants que no són constants ni periòdiques i no són de $L(\mathbb{R})$ ni de $L^2(\mathbb{R})$. Com per exemple,

$$sgn(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

Com que aquesta funció no és de $L(\mathbb{R})$ ni de $L^2(\mathbb{R})$ considerem la següent aproximació per $a \in \mathbb{R}^+$.

$$\lim_{a\to 0^+} (sgn(t)e^{-a|t|}) = sgn(t),$$

Aleshores,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(sgn(t)e^{-a|t|}) &= \lim_{a\to 0^+} \left[-\int_{-\infty}^{0} e^{t(a-2\pi jft)}dt + \int_0 \infty e^{-t(a+2\pi jft)}dt \right] \\ &= \lim_{a\to 0^+} \left[-\frac{1}{a-2\pi jf} + \frac{1}{a+2\pi jf} \right] = -\frac{j}{\pi f}, \end{aligned}$$

si $f \neq 0$.

Si $f = 0$,

$$\lim_{a\to 0^+} \left[-\frac{1}{a} + \frac{1}{a} \right] = 0.$$

□

1.7.5 TF de la funció de salt unitari

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Gràcies a la Delta de Dirac es pot obtenir una expressió per la transformada d'aquesta funció si la considerem com

$$u(t) = \frac{1}{2}(1 + sgn(t)).$$

Aleshores, fent servir la linealitat de la transformada obtenim,

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2}(\delta(f) - \frac{j}{\pi f}).$$

□

1.7.6 TF d'un tren d'impulsos

Un tren d'impulsos és la suma d'infinites Deltes de Dirac equidistans en un període T.

$$p_T(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t - nT).$$

La seva transformada no es pot obtenir sumant les infinites transformades de $\delta(t - nT)$. Però podem calcular-la com una funció T–periòdica.

Considerem la seva sèrie de Fourier,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{j2\pi n f_0 t},$$

on

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-t/2}^{T/2} \delta(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \frac{1}{T} e^{-j2\pi n f_0 0} = \frac{1}{T}.$$

Aleshores,

$$\mathcal{F}(p_T) = \frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(f - nf_0).$$

Observem que la transformada d'un tren d'impulsos és un altre tren d'impulsos.

Observació 1.34 *Les transformades de les funcions generalitzades tenen les mateixes propietats que les transformades de les funcions absolutament integrables.* □

1.7.7 Convolucions amb la Delta de Dirac

Fent servir el Teorema de convolució i la relació de la transformada respecte el desplaçament en t, obtenim

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(x(t) * \delta(t-t_0)) &= \mathcal{F}(x(t)) \cdot \mathcal{F}(\delta(t-t_0)) = \mathcal{F}(x(t))e^{-j2\pi f t_0} \\ &= \mathcal{F}(x(t-t_0)).\end{aligned}$$

D'aquí deduïm que

$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0).$$

I per tant, el producte de convolució per un delta desplaçat en t_0, desplaça la funció original en t_0.

Exemple 1.35

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(p_a(t) * \delta(t-3)) &= \mathcal{F}(p_a(t)) \cdot \mathcal{F}(\delta(t-3)) = \mathcal{F}(p_a(t))e^{-j6\pi f} \\ &= \frac{\sin(2\pi f a)}{\pi f}e^{-j6\pi f} = \mathcal{F}(p_a(t-3)).\end{aligned}$$

□

1.8 Problemes

1. Sigui $X(f)$ la transformada de Fourier d'una funció *imaginaria pura* $x(t)$. Proveu que són certes les següents afirmacions.

   (a) $X(-f) = -\overline{X(f)}$.

   (b) Si $x(t)$ és parell, $X(f)$ és una funció imaginaria parell.

   (c) Si $x(t)$ és imparell, $X(f)$ és una funció real imparell.

   $\square$

2. Sigui $L \in \mathbb{R}^+$. Comproveu que la transformada de Fourier de la següent funció

$$x(t) = \begin{cases} L - |t|, & |t| < L \\ 0, & |t| > L. \end{cases}$$

   és real i parell. $\square$

3. Per $a \in \mathbb{R}^+$ considereu la següent funció,

$$x(t) = \begin{cases} e^{-a|t|}, & t \geq 0 \\ -e^{-a|t|}, & t < 0. \end{cases}$$

   (a) Calculeu $X(f)$ i comproveu que és imaginaria pura i senar.

   (b) Com s'aproxima $\mathcal{F}^{-1}(X)$ a x? Perquè?

   $\square$

4. Sigui $x(t)$ una funció real tal que $x(t) = 0$ si $t < 0$. Comproveu que la seva transformada de Fourier compleix,

$$F(f) = F_c(f) - jF_s(f).$$

   on

$$F_c(f) = \int_{t>0} x(t)\cos(2\pi f t)dt, \qquad F_s(f) = \int_{t>0} x(t)\sin(2\pi f t)dt.$$

   són les *transformades cosinus/sinus de Fourier* de $x(t)$ per $f > 0$. $\square$

5. Sigui $a \in \mathbb{R}^+$. Trobeu la transformada $X(f)$, de la funció

$$x(t) = \begin{cases} e^{-a|t|}, & t \geq 0 \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$

   (a) Calculeu $X_c(f)$ i $X_s(f)$.

   (b) Com s'aproxima $\mathcal{F}^{-1}(X)$ a x? Perquè?

$\square$

6. Doneu la transformada de Fourier de la funció real

$$x(at+b), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

   en termes de la transformada de Fourier de $x(t)$. Interpreteu el resultat pels següents valors dels paràmetres.

   (a) $a \neq 0$, $b = 0$.

   (b) $a = 0$.

$\square$

7. Fent servir el Teorema de Parseval comproveu que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \pi.$$

$\square$

8. Considereu la funció *pols rectangular* definida per $a \in \mathbb{R}^+$,

$$p_a(t) = \begin{cases} 1, & |t| < a \\ 0, & |t| > a \end{cases}$$

   (a) Calculeu $\mathcal{F}[p_a(t-a)]$. És real?

   (b) Calculeu $\mathcal{F}[(p_a * p_b)(t)]$.

$\square$

9. Donada la *funció de l'esglaó unitari o funció de Heaviside*

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

   Trobeu les transformades de Fourier de les següents funcions,

(a) $x(t) = u(t-1)$.

(b) $y(t) = u(t) - u(t-1)$.

(c) $z(t) = e^{-3|t|}y(t)$.

$\square$

10. Fent servir la transformada de Fourier de la funció de Heaviside, $u(t)$, calculeu les transformades de Fourier de les següents funcions.

    (a) $x(t) = e^{-a|t|}u(t)$, $a \in \mathbb{R}^+$.

    (b) $y(t) = te^{-a|t|}u(t)$, $a \in \mathbb{R}^+$.

    (c) Quines són les transformades de la part parell i la part senar de $x(t)$? Interpreteu els resultats.

$\square$

11. Trobeu el producte de convolució de la següent parella de funcions, on $u(t)$ és la funció de Heaviside.

$$x(t) = u(t)\sin t, \quad y(t) = u(t)\cos t.$$

$\square$

12. Considereu la funció $x(t) = \cos^2 t$.

    (a) Calculeu la seva transformada de Fourier.

    (b) Trobeu la transformada de Fourier inversa.

$\square$

13. Fent servir la transformació de Fourier, trobeu una solució de l'equació diferencial,

$$x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = e^{-t}u(t).$$

$\square$

1.9 Problemes resolts

1. *Calculeu la transformada de Fourier de les següents funcions.*

   (a) $f(t) = e^{-2|t|}$.

   (b) $g(t) = (\frac{2}{1+t^2})^2$.

   (c) $h(t) = e^{-|t|} cos 2t$.

Resolució:

(a) Aplicant la definició,

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{2t} e^{-i\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-2t} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{e^{t(2-i\omega)}}{2-i\omega} \Big|_{-\infty}^{0} - \frac{e^{-t(2+i\omega)}}{2+i\omega} \Big|_{0}^{\infty} \\ &= \frac{1}{2-i\omega} + \frac{1}{2+i\omega} = \frac{4}{4+\omega^2}. \end{aligned}$$

(b) Del primer apartat i fent servir la linealitat de la transformada de Fourier, tenim que

$$e^{-|t|} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2}{1+\omega^2}.$$

Pel principi de dualitat,

$$\frac{2}{1+t^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi e^{-|\omega|}.$$

Ara, pel teorema de convolució,

$$\left(\frac{2}{1+t^2}\right)^2 \xrightarrow{\mathcal{F}} (2\pi)^2 (e^{-|\omega|} \star e^{-|\omega|}).$$

Si $\omega > 0$,

$$\begin{aligned} e^{-|\omega|} \star e^{-|\omega|} &= \int_{-\infty}^{0} e^{u} e^{-(\omega-u)} du + \int_{0}^{\omega} e^{-u} e^{-(\omega-u)} du + \int_{\omega}^{\infty} e^{-u} e^{\omega-u} du \\ &= e^{-\omega} \int_{-\infty}^{0} e^{2u} du + e^{-\omega} \int_{0}^{\omega} du + e^{\omega} \int_{\omega}^{\infty} e^{-2u} du \\ &= e^{-\omega}(1+\omega). \end{aligned}$$

Un càlcul similar per a $\omega < 0$ dóna

$$\begin{aligned}
e^{-|\omega|} \star e^{-|\omega|} &= \int_{-\infty}^{\omega} e^{u} e^{-(\omega-u)} du + \int_{\omega}^{0} e^{u} e^{\omega-u} du + \int_{0}^{\infty} e^{-u} e^{\omega-u} du \\
&= e^{-\omega} \int_{-\infty}^{\omega} e^{2u} du + e^{\omega} \int_{\omega}^{0} du + e^{\omega} \int_{0}^{\infty} e^{-2u} du \\
&= e^{\omega}(1+\omega).
\end{aligned}$$

d'on

$$\left(\frac{2}{1+t^2}\right)^2 \xrightarrow{\mathcal{F}} (2\pi)^2 e^{-|\omega|}(1+\omega).$$

(c) Pel teorema de convolució, i fent servir la transformada de $\cos 2t$ en termes de la funció δ,

$$\begin{aligned}
H(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{1+\omega^2}\right) \star \pi(\delta(\omega-2)+\delta(\omega+2)) \\
&= \frac{1}{1+(\omega-2)^2} + \frac{1}{1+(\omega+2)^2}.
\end{aligned}$$

□

2. *Considereu la funció*

$$x(t) = \frac{\operatorname{sinc}(t)}{1+t^2}.$$

(a) Calculeu la transformada de $x(t)$.

Indicació: *Feu servir les transformades de $e^{-2\pi|t|}$ i de la funció pols quadrat,*

$$u(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1/2 \\ 0, & |t| \geq 1/2. \end{cases}$$

(b) Fent servir la definició de transformada calculeu el valor de la següent integral,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(s\pi)}{s(1+s^2)} ds.$$

Indicació: *Escriviu $e^{-2\pi f t} = \cos(2\pi f t) - i\sin(2\pi f t)$.*

Resolució:

(a) La transformada de $y(t) = e^{-2\pi|t|}$ és $Y(f) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+f^2}$ i la de la funció pols quadrat és $\mathrm{sinc}(f) = \frac{\sin \pi f}{f}$. Així doncs

$$x(t) = \pi \mathrm{sinc}(t) Y(t),$$

i la seva transformada, fent servir la dualitat, és

$$X(f) = \pi u(f) * e^{-2\pi|f|} = \pi \int_{-\infty}^{\infty} u(s) e^{-2\pi|f-s|} ds = \pi \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi|f-s|} ds.$$

Per a $f < 1/2$ la integral és

$$X(f) = \pi \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi(f-s)} ds = e^{2\pi f} \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2},$$

i per a $f > 1/2$,

$$X(f) = \pi \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi(s-f)} ds = e^{-2\pi f} \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2}.$$

Finalment, per a $-1/2 < f < 1/2$,

$$\begin{aligned} X(f) &= \pi \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi(s-f)} ds \\ &= \pi \int_{-1/2}^{f} e^{-2\pi(f-s)} ds + \pi \int_{f}^{1/2} e^{-2\pi(s-f)} ds \\ &= e^{-2\pi f} \frac{e^{2\pi f} - e^{-\pi}}{2} + e^{2\pi f} \frac{e^{-2\pi f} - e^{-\pi}}{2} \\ &= 1 - e^{-\pi} \frac{e^{2\pi f} + e^{-2\pi f}}{2}. \end{aligned}$$

La transformada es pot expressar com

$$X(f) = \begin{cases} 1 - e^{-\pi} \cosh(2\pi f), & |f| \leq 1/2 \\ \sinh(\pi)^{-2\pi|f|}, & |f| > 1/2. \end{cases}$$

(b) Escrivint la transformada de $x(t)$, tenint en compte que $\mathrm{sinc}(t)\sin(2\pi f t)$ és una funció imparell,

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sinc}(t)}{1+t^2} e^{-2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi t)\cos(2\pi f t)}{t(1+t^2)} dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\sin(\pi t)\cos(2\pi f t)}{t(1+t^2)} dt \end{aligned}$$

veiem que la integral que volem és

$$I = \frac{\pi}{2} X(0) = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-\pi}).$$

□

3. *Sigui $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Considereu la funció*

$$x(t) = \cos(at), \quad t \in [-\pi, \pi].$$

(a) *Trobeu la seva sèrie trigonomètrica de Fourier i estudieu la seva convergència. Deduïu la corresponent sèrie complexa.*

(b) *Justifiqueu que la sèrie derivada de la sèrie obtinguda al primer apartat convergeix puntualment a la funció $y(t) = -a\sin(at)$ amb $t \in [-\pi, \pi]$.*

(c) *És cert que la sèrie derivada de $y(t)$ convergeix cap a la funció $-a^2 x(t)$? Per què?*

(d) *Trobeu la transformada de Fourier de $x(t)$. Expliqueu quina relació té amb la serie obtinguda del primer apartat.*

Resolució:

(a) La funció $x(t)$ està acotada en l'interval tancat $[\pi, \pi]$, i per tant $x(t) \in L_2[-\pi, \pi]$ i es pot calcular la seva sèrie de Fourier. D'altra banda, com que és una funció parell, la seva sèrie trigonomètrica de Fourier té la forma,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cos nt.$$

Calculem aquests coeficients,

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\langle\cos(at),1\rangle}{2\pi} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(at)dt = \frac{\sin(a\pi)}{a\pi}.$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\langle\cos(at),\cos(nt)\rangle}{\pi} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(at)\cos(nt)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(a+n)t+\cos(a-n)t]dt \\ &= \frac{a}{\pi(a^2-n^2)}(\sin(a+n)\pi+\sin(a-n)\pi) \\ &= \frac{2a\sin(a\pi)}{\pi}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2}. \end{aligned}$$

D'on,

$$STF[x(t)] = \frac{\sin(a\pi)}{a\pi} + \frac{2a\sin(a\pi)}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2}\cos(nt). \quad (1.20)$$

Com que $x(t) \in L_2(-\pi,\pi)$, la sèrie de Fourier convergeix en mitjana quadràtica a $x(t)$. D'altra banda, com que $x(t)$ és diferenciable amb continuïtat i $x(\pi) = x(-\pi)$, la sèrie convergeix uniformement a $x(t)$ i per tant també puntualment a $x(t)$.

Per obtenir la sèrie complexa de Fourier,

$$SCF[x(t)] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int} = c_0 + \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n e^{int} + \sum_{n\in\mathbb{N}} c_{-n}e^{-int},$$

a partir de la trigonomètrica fem servir les següents relacions,

$$c_n = (a_n - ib_n)/2, \quad c_{-n} = (a_n + ib_n)/2.$$

Ara bé, com que en el nostre cas $b_n = 0$, tenim que $c_n = c_{-n} = a_n/2$ i per tant,

$$\begin{aligned} SCF[x(t)] &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n>0}\frac{a_n}{2}e^{int} + \sum_{n<0}\frac{a_n}{2}e^{int} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{a_n}{2}e^{int} = \frac{a\sin(a\pi)}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2}e^{int}. \end{aligned}$$

(b) Com que $STF[x(t)]$ convergeix uniformement a $x(t)$, la sèrie derivada $STF'[x(t)]$ convergeix puntualment a la funció $x'(t) = -a\sin(at) = y(t)$. Així,

$$STF[y(t)] = \frac{2a\sin(a\pi)}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^n n}{a^2-n^2}\sin(nt).$$

D'on deduïm que,

$$STF[\sin(at)] = \frac{2\sin(a\pi)}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^n n}{n^2-a^2}\sin(nt). \tag{1.21}$$

(c) Observeu que al derivar la sèrie (1.21) *no* s'obté la sèrie de Fourier de la derivada, que és $y'(t) = a\cos(at)$.

El motiu és el següent: com que $y(\pi) \neq y(-\pi)$, la sèrie corresponent no convergeix uniformement a $y(t)$ i la seva sèrie derivada no convergeix puntualment a la funció derivada $y'(t)$.

(d) Per les mateixes raons que en el primer apartat, $x(t) \in L_1[-\pi,\pi]$ i per tant admet una transformada de Fourier real i parell,

$$\begin{aligned}
X(\omega) &= \int_{-\pi}^{\pi}\cos(at)e^{-i\omega t}dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\cos(at)[\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)]dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\cos(at)\cos(\omega t)dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(a+\omega)t + \cos(a-\omega)t]dt \\
&= \frac{\sin(a+\omega)\pi}{a+\omega} + \frac{\sin(a-\omega)\pi}{a-\omega} \\
&= \frac{2}{a^2-\omega^2}\left(a\sin(a\pi)\cos(\omega\pi) - \omega\cos(a\pi)\sin(\omega\pi)\right).
\end{aligned}$$

Observeu que aquesta darrera expressió coincideix amb l'expressió del coeficient de Fourier de la funció $x(t)$ quan prenem $\omega_n = (2\pi/T)n = n$, multiplicat per la longitud de l'interval T. És a dir,

$$X(\omega_n) = Tc_n = 2\pi\frac{a\sin(a\pi)}{\pi}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2}.$$

$\square$

4. *Considereu la funció*

$$x(t) = \begin{cases} t+3, & t \in [-3,\ 0) \\ -t, & t \in [0,\ 3] \end{cases}$$

(a) Trobeu la sèrie de Fourier complexa de $x(t)$ a l'interval $[-3,3]$. Doneu el valor al que convergeix aquesta sèrie en $t = 0$ i $t = \pm 3$.

(b) Trobeu la sèrie de Fourier en cosinus de $x(t)$ a l'interval $[0,3]$. Estudieu la seva convergència, puntual i uniforme.

(c) Donada una funció qualsevol $x(t) \in L_1(-\infty,\infty)$ tal que $x'(t), x''(t) \in L_1(-\infty,\infty)$ trobeu la transformada de Fourier de la funció següent,

$$y(t) = e^{it\pi/2}x'(t)x''(t).$$

Resolució:

(a) La sèrie de Fourier complexa de $x(t)$ a l'interval $[-3,3]$ és

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{i\pi nt/3}, \qquad \text{amb} \quad c_n = \frac{1}{6}\int_{-3}^{3} x(t)e^{-i\pi nt/3}dt,$$

on,

$$c_n = \frac{1}{6}\left(\int_{-3}^{0}(t+3)e^{-i\pi nt/3}dt - \int_{0}^{3} te^{-i\pi nt/3}dt\right).$$

Per a $n = 0$ tenim

$$c_0 = \frac{1}{6}\left(\int_{-3}^{0}(t+3)dt - \int_{0}^{3} tdt\right) = 0.$$

Per a $n \neq 0$, integrant per parts,

$$\int te^{-i\pi nt/3} = \left(\frac{3it}{\pi n} + \frac{9}{(\pi n)^2}\right)e^{-i\pi nt/3},$$

de manera que

$$\int_{-3}^{0} te^{-i\pi nt/3}dt - \int_{0}^{3} te^{-i\pi nt/3}dt =$$

$$= \frac{18}{(\pi n)^2}(1-\cos(\pi n)) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{36}{(\pi(2k+1))^2}, & n = 2k+1. \end{cases}$$

D'altra banda,

$$3\int_{-3}^{0} e^{-i\pi nt/3}dt = \frac{9i}{\pi n}(1-e^{-i\pi n}) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{18i}{\pi(2k+1)}, & n = 2k+1. \end{cases}$$

Per tant la sèrie que es demana és,

$$\frac{3}{\pi}\sum_{k} = -\infty^{\infty}\left(\frac{i}{2k+1} + \frac{2}{\pi(2k+1)^2}\right)e^{i\pi(2k+1)t/3}$$

Per a $t = 0$, la sèrie val $3/2$ mentre que $x(0) = 0$. Això és degut la discontinuïtat de salt que té $x(t)$ a l'origen (el límit per l'esquerra a l'origen val 3).

De forma anàloga, la sèrie a $t = 3$ val $-3/2$ ja que l'extensió periòdica de x té límit -3 per l'esquerra i 0 per la dreta.

(b) La sèrie de Fourier en cosinus de $x(t)$ a $[0,3]$ és la sèrie de Fourier trigonomètrica de la seva extensió *parell* a $[-3,3]$ restringida a $[0,3]$, és a dir,

$$\sum_{n\geq 1} a_n \cos\frac{\pi nt}{3}, \qquad a_n = \frac{2}{3}\int_0^3 f(t)\cos\frac{\pi nt}{3}dt$$

on,

$$a_0 = \frac{-2}{3}\int_0^3 tdt = -3,$$

i, per a $n > 0$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{-2}{3}\int_0^3 t\cos\frac{\pi nt}{3}dt \\ &= \frac{-2}{3}\left(\frac{3t}{n\pi}\sin\frac{n\pi t}{3}\Big|_0^3 - \frac{3}{n\pi}\int_0^3 \sin\frac{n\pi t}{3}dt\right) \\ &= \frac{2}{n\pi}\int_0^3 \sin\frac{n\pi t}{3}dt = -\frac{6}{(n\pi)^2}(\cos n\pi - 1) \\ &= \begin{cases} 0, & n \text{ parell;} \\ \frac{12}{\pi^2(2k+1)^2}, & n = 2k+1 \end{cases} \end{aligned}$$

Així tenim la sèrie

$$-\frac{3}{2} + \frac{12}{\pi^2}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi t}{3}.$$

(c) Si $X(f)$ és la transformada de $x(t)$, aleshores

$$\begin{aligned} x'(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} ifX(f) \\ x''(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} -f^2X(f). \end{aligned}$$

Així doncs,

$$x'(t)x''(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(f) = -\frac{1}{2\pi}((ifX(f)) * (f^2X(f)).$$

D'altra banda, la transformada de $e^{it\pi/2} = e^{-it(-\pi/2)}$ és

$$2\pi\delta(f + \pi/2).$$

Per tant,

$$e^{it\pi/2}x'(t)x''(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \delta(f + \pi/2) * Y(f) = Y(f + \pi/2).$$

$\square$

5. *Sigui*

$$x(t) = \frac{1}{1+t^2} \quad i \quad u(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1/2 \\ 0, & |t| \geq 1/2 \end{cases}$$

(a) Calculeu la transformada del producte de convolució

$$x(t) * u(t).$$

Indicació: *Feu servir la transformada de* $e^{-2\pi|t|}$.

(b) Calculeu la transformada de la funció

$$y(t) = x(t)\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}.$$

Resolució:

(a) Pel teorema de convolució,

$$\mathcal{F}(x(t) * u(t)) = \mathcal{F}(x(t))\mathcal{F}(u(t)).$$

D'una banda,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(u(t))(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-2\pi i f t}dt = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i f t}dt \\
&= \frac{e^{\pi i f} - e^{-i\pi f}}{2\pi i f} = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} = \mathrm{sinc}(f).
\end{aligned}$$

Seguint la indicació,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(e^{-2\pi|t|})(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi|t|}e^{-2\pi i f t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{2\pi t(1-if)}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-2\pi t(1+if)}dt \\
&= \left.\frac{e^{2\pi t(1-if)}}{2\pi(1-if)}\right|_{-\infty}^{0} - \left.\frac{e^{-2\pi t(1+if)}}{2\pi(1+if)}\right|_{0}^{\infty} \\
&= \frac{1}{\pi(1+f^2)} = \frac{1}{\pi}x(f).
\end{aligned}$$

Per la propietat de dualitat, la transformada de $x(t)$ és $\pi e^{-2\pi|f|}$ i la que busquem és

$$\pi \ \mathrm{sinc}(f)e^{-2\pi|f|}.$$

(b) Una altra vegada pel teorema de convolució,

$$\mathcal{F}(x(t)\mathrm{sinc}(t))(f) = \mathcal{F}(x(t)) * \mathcal{F}(\mathrm{sinc}(t))(f) = \pi e^{-2\pi|f|} * u(f).$$

Aquest producte és

$$\pi u(f) * e^{-2\pi|f|} = \pi \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(s)e^{-2\pi|f-s|}ds = \pi \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi|f-s|}ds.$$

Per a $f < 1/2$ la integral val

$$X(f) = \pi \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi(f-s)}ds = e^{2\pi f}\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2},$$

i per a $f > 1/2$,

$$X(f) = \pi \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi(s-f)}ds = e^{-2\pi f}\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2}.$$

Finalment, per a $-1/2 < f < 1/2$,

$$\begin{aligned} X(f) &= \pi \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi(s-f)} ds \\ &= \pi \int_{-1/2}^{f} e^{-2\pi(f-s)} ds + \pi \int_{f}^{1/2} e^{-2\pi(s-f)} ds \\ &= e^{-2\pi f} \frac{e^{2\pi f} - e^{-\pi}}{2} + e^{2\pi f} \frac{e^{-2\pi f} - e^{-\pi}}{2} \\ &= 1 - e^{-\pi} \frac{e^{2\pi f} + e^{-2\pi f}}{2}. \end{aligned}$$

La transformada es pot expressar com

$$X(f) = \begin{cases} 1 - e^{-\pi} \cosh(2\pi f), & |f| \leq 1/2 \\ \sinh(\pi)^{-2\pi|f|}, & |f| > 1/2. \end{cases}$$

□

6. *Considereu la funció*

$$x(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

(a) *Calculeu la transformada de Fourier $Y(f)$ de*

$$y(t) = \begin{cases} x(t-1) & t \geq 0 \\ -x(t+1) & t \leq 0 \end{cases}$$

(b) *Calculeu $\int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df$.*

(c) *Calculeu la transformada de Fourier $Z(f)$ de la funció,*

$$z(t) = y(t) * (\delta(t) + \delta(t-4) + \delta(t+4)).$$

Determineu els zeros de $Z(f)$.

Ressolució:

Tenim $x(t) = (\Pi * \Pi)(t)$ que té per transformada de Fourier

$$X(f) = \mathcal{F}(x)(f) = (\mathcal{F}(\Pi))^2(f) = \left(\frac{sin(\pi f)}{\pi f} \right)^2.$$

(a) La funció $y(t)$ es pot escriure com

$$y(t) = x(t-1) - x(t+1).$$

Fent servir les propietats de la transformada de Fourier,

$$\begin{aligned} Y(f) &= e^{-j2\pi f}\mathcal{F}(x)(f) - e^{j2\pi f}\mathcal{F}(x)(f) \\ &= -\left(\frac{sin(\pi f)}{\pi f}\right)^2 2j\sin(2\pi f). \end{aligned}$$

(b) D'acord amb la identitat de Parseval, i fent ús de les simetries de $y(t)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} |y(f)|^2 df = 4\int_0^1 t^2 dt = 4/3.$$

(c) La funció $z(t)$ es pot escriure com

$$z(t) = y(t)*\delta(t) + y(t)*\delta(t-4) + y(t)*\delta(t+4) = y(t) + y(t+4) + y(t-4).$$

La seva transformada de Fourier és

$$\begin{aligned} Z(f) &= Y(f) + e^{j8\pi f}Y(f) + e^{-j8\pi f}Y(f) = Y(f)(1 + 2\cos(8\pi f)) \\ &= -\left(\frac{sin(\pi f)}{\pi f}\right)^2 2j\sin(2\pi f)(1 + 2\cos(8\pi f)). \end{aligned}$$

La transformada $Z(f)$ s'anul·la als zeros de $\sin(2\pi f)$ ($f = k/2,\ k \in \mathbb{Z}$) i quan $\cos(8\pi f) = -1/2$, és a dir, per a $f = (1/12) + k/4,\ k \in \mathbb{Z}$ i $f = (1/6) + k/4,\ k \in \mathbb{Z}$.

□

7. *Considereu la funció pols quadrat,*

$$u(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq 1/2, \\ 0 & |t| > 1/2. \end{cases}$$

(a) Feu servir la definició de producte de convolució per expressar la funció

$$x(t) = e^{-a|t|} * u(t), \quad a \in \mathbb{R}^+.$$

(b) Calculeu la transformada de Fourier de $x(t)$ i feu servir el resultat per calcular la integral

$$I_a = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi s)}{s(a^2 + 4\pi^2 s^2)}\, ds$$

Resolució:

(a) Segons la definició de producte de convolució tenim,

$$x(t) = e^{-a|t|} * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(s) e^{-a|t-s|} ds = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-a|t-s|} ds = (*)$$

Distingim, segons els possibles valors de la variable $t \in \mathbb{R}$, els següents casos:

i. Per $t < -1/2$ es compleix que $|t - s| = s - t$ i tenim,

$$(*) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-a(s-t)} ds = e^{at} \left(\frac{e^{-as}}{-a} \right]_{-1/2}^{1/2}$$
$$= \frac{e^{at}}{-a}(e^{-a/2} - e^{a/2}) = \frac{2}{a} e^{at} \sinh(a/2).$$

ii. Per $-1/2 < t < 1/2$, el valor absolut $|t - s|$ no té una única expressió en $[-1/2, 1/2]$, depèn de si $s < t$ ò $s > t$. Tenim doncs:

$$(*) = \int_{-1/2}^{t} e^{-a(t-s)} ds + \int_{t}^{1/2} e^{-a(s-t)} ds =$$
$$= e^{-at} \left(\frac{e^{as}}{a} \right]_{-1/2}^{t} + e^{at} \left(\frac{e^{-as}}{-a} \right]_{t}^{1/2} =$$
$$= \frac{e^{-at}}{a}(e^{at} - e^{-a/2}) - \frac{e^{at}}{a}(e^{-a/2} - e^{-at}) =$$
$$= \frac{1 - e^{-a(t+\frac{1}{2})}}{a} + \frac{1 - e^{a(t-\frac{1}{2})}}{a} =$$
$$= \frac{1}{a}[2 - e^{a(t-\frac{1}{2})} - e^{-a(t+\frac{1}{2})}] = \frac{2}{a}[1 - e^{-a/2} \cosh(at)].$$

iii. Si $t > 1/2$, tenim $|t-s| = t-s$ i

$$\begin{aligned}(*) &= \int_{-1/2}^{1/2} e^{-a(t-s)} ds = e^{-at}\left(\frac{e^{as}}{a}\right]_{-1/2}^{1/2} \\ &= \frac{e^{-at}}{a}(e^{a/2} - e^{-a/2}) = \frac{2}{a}e^{-at}\sinh(a/2).\end{aligned}$$

En resum,

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-a|t|} * \Pi(t) \\ &= \left\{\begin{array}{ll} 2e^{at}\sinh(a/2)/a, & t < -1/2, \\ 2[1-e^{-a/2}\cosh(at)]/a, & -1/2 < t < 1/2, \\ 2e^{-at}\sinh(a/2)/a, & t > 1/2. \end{array}\right\} \\ &= \left\{\begin{array}{ll} 2[1-e^{-a/2}\cosh(at)]/a, & |t| < 1/2, \\ 2e^{-a|t|}\sinh(a/2)/a, & |t| > 1/2. \end{array}\right.\end{aligned}$$

(b) Fent servir el Teorema de la Convolució tenim,

$$X(f) = [x] = [e^{-a|t|}][\Pi(t)] = \frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}\cdot\frac{\sin(\pi f)}{\pi f} = \frac{2a\sin(\pi f)}{\pi f(a^2+4\pi f^2)}.$$

Com que $x(t)$ és una funció contínua de $L^1(-\infty, +\infty)$, per a tot $t \in \mathbb{R}$ es compleix, $x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(f)](t)$. Així doncs,

$$\mathcal{F}^{-1}[X(f)](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2a\sin(\pi f)}{\pi f(a^2+4\pi^2 f^2)} e^{2\pi f t} df = x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

En particular, per a $t = 0$ tenim,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2a\sin(\pi f)}{\pi f(a^2+4\pi^2 f^2)} df = \frac{2a}{\pi} I_a = x(0)$$

D'on,

$$I_a = \frac{\pi}{2a}x(0) = \frac{\pi}{a^2}(1-e^{-a/2}).$$

□

8. *Per a cada enter $n \in \mathbb{Z}$ es defineix la funció $p_n(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$p_n(t) = \left\{\begin{array}{ll} e^{2t}, & t \in [n, n+1) \\ 0, & \textit{altrament.} \end{array}\right.$$

(a) *Fent servir la definió, proveu que la transformada de Fourier de $p_n(t)$ és*

$$P_n(f) = sinc\ (\pi f + j)e^{(2n+1)(1-j\pi f)}.$$

(b) *Calculeu la transformada del senyal*

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_{-n}(t),$$

on $a_{2k} = 1$ i $a_{2k+1} = 0$ per $k \geq 0$.

(c) *Proveu que per qualsevol enter n, la transformada del produce de convolució $p_{n-1} \star p_{-n}$ és*

$$sinc^2(\pi f + j).$$

Resolució:

(a) Fent servir la definició de transformada obtenim,

$$\begin{aligned}
P_n(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_n(t)e^{-2\pi ftj}dt \\
&= \int_{n}^{n+1} e^{2t(1-\pi fj)}dt = \left.\frac{e^{2t(1-\pi fj)}}{2(1-\pi fj)}\right]_n^{n+1} \\
&= \frac{1}{2(1-\pi fj)}(e^{2(n+1)(1-\pi fj)} - e^{2n(1-\pi fj)}) \\
&= \frac{e^{(2n+1)(1-\pi fj)}}{2(1-\pi fj)}(e^{(1-\pi fj)} - e^{(-1+\pi fj)}) \\
&= \text{sinc } (\pi f + j)e^{(2n+1)(1-j\pi f)}.
\end{aligned}$$

(b) Com que $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{-2n}(t)$ llavors

$$\begin{aligned}
X(f) &= \text{sinc } (\pi f + j)e^{(1-j\pi f)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-4n(1-j\pi f)} \\
&= \text{sinc } (\pi f + j)\frac{e^{(1-j\pi f)}}{1 - e^{-4(1-j\pi f)}} \\
&= \frac{2j\text{sinc } (\pi f + j)e^{3(1-j\pi f)}}{\sin(2\pi f + 2j)} \\
&= \frac{je^{3(1-j\pi f)}}{(\pi f + j)\cos(\pi f + j)}.
\end{aligned}$$

(c) Pel Teorema de Convolució sabem que la transformada de $p_{n-1} \star p_{-n}$ és $P_{n-1} \cdot P_{-n}$ i per tant tenim,

$$\begin{aligned} P_{n-1}(f) \cdot P_{-n}(f) &= \frac{\sin^2(\pi f + j)}{(\pi f + j)^2} e^{(2n-1)(1-j\pi f)} e^{(-2n+1)(1-j\pi f)} \\ &= \operatorname{sinc}^2(\pi f + j). \end{aligned}$$

Així doncs el resultat no depèn de n. □

Capítol 2

Transformada Discreta de Fourier

2.1 Introducció

Tant les sèries com les transformades de Fourier es poden considerar com mesures de la freqüència de les funcions reals o complexes involucrades.

Sabem que tota funció $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{C}$ absolutament integrable, teoricament admet una transformada de Fourier,

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt.$$

Però a la pràctica les integrals que defineixen aquestes transformades poden resultar complicades o impossibles de resoldre. En aquest sentit és útil considerar el que s'anomena transformada discreta de Fourier.

D'altra banda, la majoria de funcions que representen senyals quasi mai tenen expressions analítiques i per tant cal treballar amb mostres finites d'aquests senyals. Aquestes mostres es trien entre els valors de d'una funció real o complexa definida en un interval de temps finit, $x : [a, b] \to \mathbb{R}/\mathbb{C}$.

En general l'interval de temps $[a, b]$ es considera positiu. Però per altres aplicacions per exemple en el tractament d'imatge l'interval de temps $[a, b]$ es considera centrat a l'origen.

Revisem primer la noció de senyal o funció discreta.

2.2 Senyals discrets

Les funcions reals o complexes definites per $t \in \mathbb{R}$ s'anomenen **senyals analògics** si són continus. Si la variable t només pren valors sobre els nombres enters, aleshores diem que el **senyal és discret**. Així, els senyals discrets es poden interpretar com seqüències reals o complexes formades pels diferents valors que pren la funció sobre els enters,

$$\cdots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2 \cdots .$$

Per exemple, **l'impuls discret** o **delta de Kronecker**, que en $t = 0$ pren el valor ù i a la resta d'enters val zero.

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

Es pot desplaçar l'impluls sobre qualsevol qualsevol enter $k' \neq 0$,

$$\delta_{k-k'} = \begin{cases} 1, & k = k' \\ 0, & k \neq k'. \end{cases}$$

D'aquesta funció discreta tan simple s'obtenen altres funcions discretes, també útils i senzilles. Per exemple, **l'esglaò discret** o **funció de Heaviside**, que sobre els nombres naturals val ú i en la resta d'enters val zero.

$$u_k = \begin{cases} 1, & k \in \mathbb{N} \\ 0, & k \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

De forma similar al impuls discret, també es pot desplaçar l'esglaò discret, cap a la dreta del zero si $k' < 0$ i cap a esquerra si $k' > 0$,

$$u_{k-k'} = \begin{cases} 1, & k \geq k' \\ 0, & k < k'. \end{cases}$$

Multiplicant l'esglaó unitari per una constant s'obtenen esglaons de qualsevol alçada i també es poden obtenir moltes altres funcions discretes, per exemple,

$$x_k = k^2 u_k = \begin{cases} k^2, & k \in \mathbb{N} \\ 0, & k \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

$$x_k = 2^k u_k = \begin{cases} 2^k, & k \in \mathbb{N} \\ 0, & k \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

2.3 Transformada discreta de Fourier

En molts casos, espacialment en Teoria del senyal, és útil considerar senyals discrets a partir de $N \in \mathbb{N}$ mostres d'un senyal continu real o complexe, considerat només en un interval de temps positiu i finit, $[0, T] \subset \mathbb{R}$. Així s'obtè el que s'anomena **seqüència d'un senyal** de longitud $N \leq T$,

$$(x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{N-1}).$$

En general els instants d'evaluació del senyal són equidistants en $[0, T]$. Això és, distribuits en intervals de temps $\Delta = T/N$. Així, els instants en els que considerem el senyal són, $t_k = kT/N$, $0 \leq k < N$ i els valors de les mostres són $x_k = x(t_k)$, $0 \leq k < N$.

Donada una seqüència, $(x_k)_{0 \leq k < N}$ real o complexa es pot obtenir una altra seqüència també de longitud N, $(X_n)_{0 \leq n < N}$, anomenada **Transformada discreta de Fourier**, coneguda per les sigles DFT (Discret Fourier Transform), a partir d'una combinació lineal finita d'exponencials complexes $e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ de la següent forma,

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad 0 \leq n < N. \tag{2.1}$$

Per simplicitat escrivim $X_n = \mathcal{D}(x_k)$.

Observació 2.1 *La justificació d'aquestes expressions s'obtè de la Transformada continua de Fourier al considerar N mostres equidistants d'un senyal continu definit en un interval de temps finit i positiu, $[0, T]$,*

$$X(f) = \int_0^T x(t) e^{-j2\pi ft} dt.$$

Denotem per $f_n = n/T$ amb $0 \leq n < N$ i obtenim,

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j2\pi \frac{n}{T} k \frac{T}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad 0 \leq n < N.$$

□

Observació 2.2 *El conjunt finit d'exponencials complexes $e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$, $0 \leq k, n < N$ que permeten obtenir la DFT d'una seqüència de qualsevol longitud N formen una* **base ortogonal** *del espai vectorial amb el que treballem $\mathbb{C}^N$ o $\mathbb{R}^N$.*

Per comoditat denotem per $\rho = e^{j\frac{2\pi}{N}}$.

Ortogonalitat

Per tot $0 \leq n < N$ *els vectors* ρ^{nk} *i* $\rho^{nk'}$ *són ortogonals en l'espai* $\mathbb{C}^N$ *si* $k \neq k'$,

$$\langle \rho^{nk}, \rho^{nk'} \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \rho^{kn} \rho^{-k'n} = \sum_{n=0}^{N-1} \rho^{n(k-k')}$$

Aquesta és la suma de N *termes d'una progressió geomètrica de raò* $\rho^{k-k'} \neq 1$. *Així tenim,*

$$\langle \rho^{nk}, \rho^{nk'} \rangle = \frac{1 - \rho^{N(k-k')}}{1 - \rho^{k-k'}} = 0.$$

□

Norma

Els vectors ρ^{nk} *tenem norma*

$$\|\rho^{nk}\| = \langle \rho^{nk}, \rho^{nk} \rangle^{1/2} = \sqrt{N}.$$

□

2.3.1 Transformada discreta de Fourier inversa

De forma similar al cas continu també podem recuperar una seqüència a partir de la seva seqüència transformada. Aquesta s'obté a travès del que s'anomena la **Transformada discreta de Fourier inversa**, IDFT (Invers Discret Fourier Transform),

$$x_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad 0 \leq k < N. \tag{2.2}$$

Per abreujar escrivim $x_k = \mathcal{D}^{-1}(X_n)$.

2.3.2 Propietats de la DFT i IDFT

Les propietats de les transformades discretes són similars a les de les transformades continues. Describim les més importants.

Escrivint $\rho = e^{j\frac{2\pi}{N}}$ la DFT i la IDFT són respectivament,

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \rho^{-kn}, \quad 0 \leq n < N,$$

$$x_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n \rho^{kn}, \quad 0 \leq k < N.$$

Linealitat

Donades dues seqüències $\{x_k\}_{0\leq k<N}$ i $\{y_k\}_{0\leq k<N}$ i les seves transformades respectives $\{X_n\}_{0\leq n<N}$, $\{Y_n\}_{0\leq n<N}$, per qualsevol parell de constants $\alpha, \beta \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$ sempre es compleix,

$$\mathcal{D}(\alpha x_k + \beta y_k) = \alpha X_n + \beta Y_n.$$

$\square$

És a dir, podem calcular la transformada discreta de qualsevol combinació lineal de seqüències a partir de la corresponent combinació lineal de les transformades corresponents.

Periodicitat de DFT i IDFT

Tant la transformada discreta com la seva transformada inversa són vàlides fora del interval discret de definició $[0, N)$ i es poden estendre a tot $\mathbb{Z}$ de forma periòdica.

Donada una seqüència $\{x_k\}_{0\leq k<N}$, la seva transdormada $\{X_n\}_{0\leq n<N}$ s'esten periodicament amb període N. Això és, per tot $m \in \mathbb{Z}$ es compleix,

$$X_{n+mN} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \rho^{-(n+mN)k} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \rho^{-nk} = X_n.$$

$\square$

La transformada discreta inversa estén també amb període N, el senyal discret $\{x_k\}_{0\leq k<N}$ a tot $\mathbb{Z}$.

$$x_{k+mN} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n \rho^{(k+mN)n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n \rho^{nk} = x_k.$$

$\square$

Igualtat de Perseval

En el cas discret també es compleix l'important igualtat de Perseval,

$$\sum_{k=0}^{N-1} |x_k|^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |X_n|^2.$$

□

Simetria de la DFT d'una seqüència real de longitud parell

Donada una seqüència real de longitud parell $N = 2M$, $\{x_k\}_{0\leq k<2M}$, podem calcular la seva transformada $\{X_n\}_{0\leq n<2M}$ només amb la meitat més un termes.

Fem servir la definició de la DFT i per $0 < n < M$ tenim,

$$X_{M-n} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \rho^{-(M-n)k} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \rho^{-Mk} \rho^{nk}.$$

Com que $-M = (M - N)$, podem escriure

$$X_{M-n} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \rho^{(M-N)k} \rho^{nk} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \rho^{(M+n)k}.$$

Per tant, com que $\{x_k\}_{0\leq k<2M} \in \mathbb{R}^{2M}$, tenim $x_k = \overline{x_k}$, i així

$$X_{M-n} = \overline{X_{M+n}}. \tag{2.3}$$

2.3.3 Forma matricial de DFT i IDFT

Els sumatoris 2.1 i 2.2 que representen la transformada discreta i la seva inversa,

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad 0 \leq n < N,$$

$$x_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad 0 \leq k < N,$$

fent servir el canvi $\rho = e^{j\frac{2\pi}{N}}$ es poden expressar en forma matricial respectivament com,

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ . \\ . \\ . \\ X_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & . \; . \; . & 1 \\ 1 & \rho^{-1} & \rho^{-2} & . \; . \; . & \rho^{1-N} \\ 1 & \rho^{-2} & \rho^{-4} & . \; . \; . & \rho^{2(1-N)} \\ . & . & . & . \; . \; . \; . & . \\ . & . & . & . \; . \; . \; . & . \\ . & . & . & . \; . \; . \; . & . \\ 1 & \rho^{1-N} & \rho^{2(1-N)} & . \; . \; . & \rho^{(1-N)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_{N-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & . \; . \; . & 1 \\ 1 & \rho & \rho^{2} & . \; . \; . & \rho^{N-1} \\ 1 & \rho^{2} & \rho^{4} & . \; . \; . & \rho^{2(N-1)} \\ . & . & . & . \; . \; . \; . & . \\ . & . & . & . \; . \; . \; . & . \\ . & . & . & . \; . \; . \; . & . \\ 1 & \rho^{N-1} & \rho^{2(N-1)} & . \; . \; . & \rho^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ . \\ . \\ . \\ X_{N-1} \end{pmatrix}$$

Observem que aquesta matriu és simètrica i per tant només cal calcular la meitat dels valors d'aquestes exponencials complexes. Però, gràcies a la periodicitat de ρ, és a dir,

$$\rho^{k+mN} = \rho^k$$

el nombre ρ^{-k} que s'han de calcular és menor, tal com podeu veure en el següent exemple.

Exemple 2.3 *Calculem la DFT de la seqüència* $S_5 = \{1, 0, 1, 0, 1\}$.

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \rho^{-1} & \rho^{-2} & \rho^{-3} & \rho^{-4} \\ 1 & \rho^{-2} & \rho^{-4} & \rho^{-6} & \rho^{-8} \\ 1 & \rho^{-3} & \rho^{-6} & \rho^{-9} & \rho^{-12} \\ 1 & \rho^{-4} & \rho^{-8} & \rho^{-12} & \rho^{-16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fent servir la periodicitat de ρ*, per qualsevol* $m \in \mathbb{Z}$*, tenim,*

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \rho^{-1} & \rho^{-2} & \rho^{-3} & \rho^{-4} \\ 1 & \rho^{-2} & \rho^{-4} & \rho^{-1} & \rho^{-3} \\ 1 & \rho^{-3} & \rho^{-1} & \rho^{-4} & \rho^{-2} \\ 1 & \rho^{-4} & \rho^{-3} & \rho^{-2} & \rho^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Així,

$$\begin{aligned} X_0 &= 3, \\ X_1 &= 1+\rho^{-2}+\rho^{-4} \\ X_2 &= 1+\rho^{-4}+\rho^{-3} \\ X_3 &= 1+\rho^{-1}+\rho^{-2} \\ X_4 &= 1+\rho^{-3}+\rho^{-1} \end{aligned}$$

Podem calcular per els valors de ρ^{-k} *per cada* $0 < k < N$ *fent servir la Fòrmula de Euler,*

$$\rho^{-k} = \cos(\frac{2\pi k}{5}) - j\sin(\frac{2\pi k}{5}),$$

□

Exemple 2.4 *Calcular la DFT de la seqüència* $S_6 = \{1,0,1,0,1,0\}$ *és més sencill ja que la seva longitud és parell i podem fer servir la propietat de simetria 2.3 en aquest cas. De tota manera, calcularem la DFT a partir de la seva definició i veurem com es simpifiquen els seus càlculs directament.*

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \rho^{-1} & \rho^{-2} & \rho^{-3} & \rho^{-4} & \rho^{-5} \\ 1 & \rho^{-2} & \rho^{-4} & \rho^{-6} & \rho^{-8} & \rho^{-10} \\ 1 & \rho^{-3} & \rho^{-6} & \rho^{-9} & \rho^{-12} & \rho^{-15} \\ 1 & \rho^{-4} & \rho^{-8} & \rho^{-12} & \rho^{-16} & \rho^{-20} \\ 1 & \rho^{-5} & \rho^{-10} & \rho^{-15} & \rho^{-20} & \rho^{-25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fent servir la periodicitat de ρ *tenim,*

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \rho^{-1} & \rho^{-2} & \rho^{-3} & \rho^{-4} & \rho^{-5} \\ 1 & \rho^{-2} & \rho^{-4} & \rho^{-1} & \rho^{-2} & \rho^{-4} \\ 1 & \rho^{-3} & \rho^{-1} & \rho^{-3} & \rho^{-2} & \rho^{-3} \\ 1 & \rho^{-4} & \rho^{-2} & \rho^{-2} & \rho^{-4} & \rho^{-2} \\ 1 & \rho^{-5} & \rho^{-4} & \rho^{-3} & \rho^{-2} & \rho^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Observeu que a diferència del exemple anterior, aquí només caldria calcular *tres valors de* ρ^{-k}*, per* $0 < k < 4$*. Així,*

$$\begin{aligned} X_0 &= 3, \\ X_1 &= 1 + \rho^{-2} + \rho^{-4}, \\ X_2 &= X_1, \\ X_3 &= 1 + \rho^{-1} + \rho^{-2}, \\ X_4 &= X_1, \\ X_5 &= X_1. \end{aligned}$$

Fent servir la fòrmula de Euler

$$\rho^{-k} = \cos(\frac{\pi k}{3}) - j\sin(\frac{\pi k}{3}).$$

tenim,

$$\begin{aligned} \rho^{-1} &= \cos(\frac{\pi}{3}) - j\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}(1 - j\sqrt{3}). \\ \rho^{-2} &= \cos(\frac{2\pi}{3}) - j\sin(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}(1 + j\sqrt{3}). \\ \rho^{-4} &= \cos(\frac{4\pi}{3}) - j\sin(\frac{4\pi}{3}) = \frac{1}{2}(1 + j\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned} X_0 &= 3, \\ X_1 &= 1 + \rho^{-2} + \rho^{-4} = 1, \\ X_2 &= 1, \\ X_3 &= 1 + \rho^{-1} + \rho^{-2} = 1 - 2\sqrt{3}j, \\ X_4 &= 1, \\ X_5 &= 1. \end{aligned}$$

Observem que es compleix la propietat de simetria 2.3,

$$X_{3-n} = \overline{X_{3+n}}, \quad 0 < n < 3.$$

La transformada que busquem és,

$$DFT(S_6) = (3, 1, 1, 1 - 2\sqrt{3}j, 1, 1) \in \mathbb{C}^6.$$

$\square$

Observació 2.5 *En general els càlculs de la TDF per seqüències llargues es fan amb programes d'ordinador i aquests programes fan servir un algorisme anomenat Transformada ràpida de Fourier TRF que permet obtenir la seqüència transformada amb moltes menys operacions de les que caldria per fer-ho directament.* □

2.4 Problemes

1. Calculeu la transformada discreta de Fourier dels següents senyals

   (a) $\{x_k\} = \{1, -1, 1\}$.

   (b) $\{x_k\} = \{1, 0, -1, 0, 1\}$.

   A partir de la transformada obtinguda trobeu la corresponent transformada inversa. □

2. Calculeu la transformada discreta de Fourier dels següents senyals

   (a) $\{x_k\} = \{1, -1, 1, -1, 1, -1\}$.

   (b) $\{x_k\} = \{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0\}$.

   Compareu el resultat amb el del exercici anterior. □

3. Quina és la transformada discreta de Fourier dels següents senyals

   (a) $\{x_k\} = \{1, -j, 2, j\}$.

   (b) $\{x_k\} = \{1, 0, j, 1, 0, j\}$.

   A quins valors representen les transformades obtingudes? □

4. Compareu les DFT dels següents senyals,

   (a) $\{x_k\} = \{0, 1, 2\}$.

   (b) $\{x_k\} = \{0, 1, 2, 0, 1, 2\}$.

   □

5. Calculeu les DFT de les següents seqüències i comproveu que es compleix l'igualtat de Perseval en cadascuna d'elles.

   (a) $\{x_k\} = \{0, 1, 2\}$.

   (b) $\{x_k\} = \{0, 1, 2, 3\}$.

   □

6. Calculeu les IDFT de les següents seqüències i comproveu que es compleix l'igualtat de Perseval en cadascuna d'elles.

   (a) $\{X_n\} = \{0, 1, 2\}$.

   (b) $\{X_n\} = \{0, 1, 2, 3\}$.

   Compareu els resultats amb els del exercici anterior. □

2.5 Problemes resolts

1. *Sigui* $x(t) = \cos(2\pi t/3) + 2\sin(\pi t/3)$.

   (a) Calculeu la transformada discreta de Fourier $(X(n))_{0\le n<6}$ *de la seqüència* $\{x_k\}_{0\le k<6}$ *que s'obté mostrejant* $x(t)$ *en els punts* $t_k = k$, *amb* $0 \le k < 6$, *a l'interval* $[0, 6)$.

   (b) Calculeu la sèrie de Fourier exponencial de $x(t)$ *a l'interval* $[0, 6)$, $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi int/6}$.
   Comproveu que per $0 \le n < N$ *es compleix la següent relació*

$$X(n) = N \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{n+rN}.$$

Resolució:

(a) Escrivim

$$x_1(t) = \cos(2\pi t/3), \quad x_2(t) = \sin(\pi t/3).$$

Les seqüències que s'obtenen al mostrejar $x(t)$ en els instants $t_k = k$, $0 \le k < N$, són

$$(x_1(k))_{0\le k<6} = (1, -1/2, -1/2, 1, -1/2, -1/2)$$

$$(x_2(k))_{0\le k<6} = (0, \sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2, 0, -\sqrt{3}/2, -\sqrt{3}/2)$$

Per $1 \le i \le 2$ la transformada de $(x_i(k))_{0\le k<6}$ és

$$X_i(n) = \sum_{k=0}^{5} x_i(k) e^{-2\pi i n k/6},\ 0 \le n \le 5.$$

Com que $x(t)$ és real i N és parell, per simetria es compleix que

$$X(N/2+n) = \overline{X(N/2-n)}, \quad 0 \le n < N/2$$

així només cal calcular els quatre primers valors de $X_1(n)$ i $X_2(n)$.
Posant $r = e^{-\pi i/3}$, tenim

$$X_i(n) = \sum_{k=0}^{5} x_i(k) r^{nk},\ 0 \le n \le 3.$$

Per tant la matriu de la transformació és,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & r & r^2 & r^3 & r^4 & r^5 \\ 1 & r^2 & r^4 & 1 & r^2 & r^4 \\ 1 & r^3 & 1 & r^3 & 1 & r^3 \end{pmatrix}.$$

Així,

$$\begin{pmatrix} X_1(0) \\ X_1(1) \\ X_1(2) \\ X_1(3) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = (0, 0, 3, 0).$$

D'on $(X_1(n))_{0\le n<6} = (0, 0, 3, 0, 3, 0)$.
De forma similar tenim,

$$\begin{pmatrix} X_2(0) \\ X_2(1) \\ X_2(2) \\ X_2(3) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2}(0, -i2\sqrt{3}, 0, 0).$$

D'on $(X_2(n))_{0\le n<6} = (0, -3i, 0, 0, 0, 3i)$.

(b) La sèrie de Fourier de $x(t)$ a $[0,6)$ és,

$$x(t) = \frac{e^{2\pi i t/3} + e^{-2\pi t/3}}{2} + \frac{e^{\pi i t/3} - e^{-\pi i t/3}}{i} =$$

$$= \frac{1}{2}e^{-2(2\pi t/6)} + ie^{-2\pi t/6} - ie^{2\pi t/6} + \frac{1}{2}e^{2(2\pi t/6)}.$$

D'on, $c_{-2} = 1/2$, $c_{-1} = i$, $c_0 = 0$, $c_1 = -i$, $c_2 = 1/2$, i $c_n = 0$ per $n > 2$ i $n < -2$.

De forma directa veiem que per $0 \leq n \leq 2$, $X(n) = 6c_n$ i per $3 \leq n \leq 5$, $X(n) = 6c_{n-6}$.

Hem comprovat per tant que per tot $0 \leq n < N$ es compleix

$$X(n) = N \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{n+rN},$$

tal com volíem. □

Per tant el valor de la seqüència transformada és,

$$(X(n))_{0 \leq n < 6} = (0, -6i, 3, 0, 3, 6i).$$

□

2. *Sigui* $u(n) = (1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1)$. *Per a cada nombre natural* m, *indiquem per* $v_m = u^{*m}$ *el producte de convolució de la seqüència* u *per ella mateixa* m *vegades.*

   Determineu la transformada discreta de Fourier de v_m.

Resolució:

La transformada discreta de Fourier de $u(n)$ és

$$U(k) = \sum_{n=0}^{7} u(n) e^{-i(\pi/4)kn}.$$

Si denotem per $r = e^{-i(\pi/4)}$, tenim

$$U(k) = 1 + r^k - r^{2k} - r^{3k} + r^{4k} + r^{5k} - r^{6k} - r^{7k} =$$

$$= 1 + r^k - r^{2k} - r^{3k} + (-1)^k + r^{3k} - r^{2k} - r^k =$$
$$= 1 + (-1)^k - 2r^{2k}.$$

Com que $r^2 = -i$ per $0 \leq k < 8$ tenim,

$$U(k) = (0, 2i, 4, -2i, 0, 2i, 4, -2i).$$

Fent servir el teorema de convolució, tenim $V_m(k) = (U(k))^m$, d'on

$$V_m = (0, (2i)^m, 4^m, (-2i)^m, 0, (2i)^m, 4^m, (-2i)^m).$$

□

3. *Considerem la seqüència* $v = (0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1)$. *Determineu la transformada discreta de Fourier de* v *i de* $v * v$.

Resolució:

La transformada discreta de Fourier de $v = (0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1)$ és

$$\begin{aligned} V(k) &= \sum_{n=0}^{7} v(n) e^{-j(\pi/4)kn} \\ &= e^{-j(\pi/4)k} - e^{-j(\pi/4)3k} + e^{-j(\pi/4)5k} - e^{-j(\pi/4)7k} \\ &= e^{-j(\pi/4)k} - e^{j(\pi/4)k} + e^{j(\pi/4)k} - e^{-j(\pi/4)k} \\ &= 4j \sin((\pi/4)k), \end{aligned}$$

és a dir,

$$V = (0, 4j, 0, -4j, 0, 4j, 0, -4j).$$

Fent servir el teorema de convolució, tenim que la transformada discreta de Fourier de $v * v$ és $V(k) = (U(k))^r$, d'on

$$V = (0, -16, 0, -16, 0, -16, 0, -16).$$

□